E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. LYON - I.S.E.N. LILLE TOULON - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1991

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

SERIE P *Lundi 6 mai 1991 de 8 h à 12 h*

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Le problème étudie une suite de polynômes orthogonaux pour un certain produit scalaire et ses applications au développement de fonctions continues en séries de polynômes.

On identifiera dans tout le problème : le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynômiale : $\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & P(t) \end{array}$, et en particulier (pour $k \in \mathbb{N}$) X^k avec la fonction : $\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^k \end{array}$.

Dans tout le problème, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

Partie I

Soit $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$ sur $\mathbb{R}$, muni de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

Soit φ : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ P(X) & \longmapsto & (1-X^2)\,P''(X) - 3\,X\,P'(X) \end{array}$

1) Donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

2) a) Déterminer les valeurs propres de φ.
Montrer que φ est diagonalisable et qu'il existe une base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ formée de vecteurs propres de coefficients dominants égaux à 1, tels que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, P_k soit de degré k .

A SUIVRE

b) Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3 .
Quelle est la parité de P_n ?
Calculer le coefficient de X^{n-2} dans P_n.

On considère l'équation différentielle
$$(E_n) : (1-x^2)\, y'' - 3\, x\, y' + n(n+2)\, y = 0.$$

3) On suppose dans cette question que n est impair.
Montrer qu'il existe une solution de (E_n) développable en série entière de la forme $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}\, x^{2p}$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} \neq 0$.
Calculer le rayon de convergence de cette série entière.
En déduire toutes les solutions de (E_n) sur l'intervalle $]-1,+1[$.

(L'étude du cas n pair est analogue ; elle n'est pas demandée).

Partie II

On note E l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On identifie encore $\mathcal{P}$ au sous espace de E constitué des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour f et g dans E on pose : $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, \sqrt{1-t^2}\, dt$.

1) a) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire dans E.

b) Calculer $\langle X^i | X^j \rangle$ pour i et j dans $\mathbb{N}$.

Pour $f \in E$, de classe C^2 sur $[-1,+1]$ on pose :
$$\varphi : f \mapsto (1-x^2)\, f''(x) - 3x\, f'(x) .$$

2) a) Montrer que :
si f et g sont de classe C^2 sur $[-1,+1]$ alors $\langle \varphi(f)|g\rangle = \langle f|\varphi(g)\rangle$.

b) Montrer que, pour les polynômes P_k définis dans la question I.2)a), on a : $\langle P_k | P_n \rangle = 0 \quad \forall\, k \in \{0,1, \ldots, n-1\}$.

3) a) Montrer que $P_n - XP_{n-1}$ est de degré n - 1 et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré n - 3 (pour $n \geqslant 3$).

b) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $4\, P_n - 4\, XP_{n-1} + P_{n-2} = 0$.

4) a) Montrer que : $\langle P_n | P_n \rangle = \langle P_n | X^n \rangle = \int_{-1}^{1} t^n\, P_n(t)\, \sqrt{1-t^2}\, dt$.
Calculer $\langle P_n | P_n \rangle$ pour n = 0, 1, et 2 .

Tournez la page S.V.P.

b) Pour $k = 0,1,..n$, montrer : $\left\langle P_k \middle| X^{k+2} \right\rangle = \frac{k+1}{4} \langle P_k | P_k \rangle$.

c) En déduire une relation de récurrence entre
$\langle P_n | P_n \rangle$, $\langle P_{n-1} | P_{n-1} \rangle$ et $\langle P_{n-2} | P_{n-2} \rangle$.

d) Montrer que : $\langle P_n | P_n \rangle = \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

5) Calculer $P_n(1)$ en utilisant une récurrence.

Partie III

Soit $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ |x|<1, \ |y|<1, \ |z|<1, \ x^2+y^2+z^2-2xyz < 1\}$.

On définit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}} \quad \text{si } (x,y,z) \in \mathcal{D},$$

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{si } (x,y,z) \notin \mathcal{D}.$$

1) Soit $x \in]-1,1[$ et $y \in]-1,1[$.

Montrer que : $-1 \leqslant xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} < xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leqslant 1$.

En déduire qu'alors :

$(x,y,z) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} < z < xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in]-1,1[$ et $y \in]-1,1[$, on pose :

$$I_n(x,y) = \int_{-1}^{1} f(x,y,z) \, P_n(z) \sqrt{1-z^2} \, dz .$$

2) Montrer que $I_n(x,y)$ est un polynôme de degré n en x, ainsi qu'un polynôme en y.

3) En déduire que, pour $n < m$ et $y \in]-1,1[$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y,z) \, P_n(z) \sqrt{1-z^2} \, dz \right) P_m(x) \sqrt{1-x^2} \, dx = 0 .$$

On admettra que le résultat demeure si $n > m$.

A SUIVRE

4) Montrer que $I_n(x,y)$ est de la forme $\varphi(y)\, P_n(x)$, et de la forme $\psi(x)\, P_n(y)$.
En déduire qu'il existe λ_n réel tel que : $I_n(x,y) = \lambda_n\, P_n(x)\, P_n(y)$.

5) En étudiant $\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1} J_k(x,y)\right)$, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \dfrac{2}{P_n(1)}$.

6) Soit $a \in [-1,1]$ tel que : $|P_n(a)| = \sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|$.

a) Si $a \in\,]-1,1[$, montrer que : $|I_n(a,a)| \leqslant |P_n(a)|\, I_0(a,a)$.

b) En déduire dans ce cas : $|P_n(a)| \leqslant \dfrac{2}{\lambda_n}$.

c) Conclure : $P_n(1) = \sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|$.

Partie IV

1) Soit $f \in E$.

On admettra que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que
$$\forall\, t \in [-1,1],\ |f(t) - Q(t)| < \varepsilon \ .$$

Montrer alors que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\langle f|P_n\rangle = 0$, alors :
$$\langle f|f\rangle \leqslant \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\langle f|f\rangle} \ .$$

En déduire : $\left(\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ \langle f|P_n\rangle = 0\right) \longrightarrow \left(f = 0\right)$.

Soit F l'ensemble des fonctions continues f de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\langle f|P_n\rangle}{\langle P_n|P_n\rangle}$ converge.

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

3) Soit $f \in F$.

a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\langle f|P_n\rangle}{\langle P_n|P_n\rangle} P_n(x)$ converge uniformément sur $[-1,1]$.

b) Soit $\hat{f}$ la somme de cette série.

Calculer $\left\langle \hat{f} \mid P_k \right\rangle$ pour $k \in \mathbb{N}$.
En déduire que $\hat{f} = f$.

FIN